4.3 分部积分法

由导数公式 $(uv)' = u'v + uv'$

积分得: $uv = \int u'v\,\mathrm{d}x + \int uv'\,\mathrm{d}x$

$$\left.\begin{aligned} &\Longrightarrow \int uv'\,\mathrm{d}x = uv - \int u'v\,\mathrm{d}x \\ &\text{或} \quad \int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u \end{aligned}\right\}\text{分部积分公式}$$

选取 u 及 v' (或 $\mathrm{d}v$) 的原则:

1) v 容易求得;

2) $\int u'v\,\mathrm{d}x$ 比 $\int uv'\,\mathrm{d}x$ 容易计算.

例1 求$\int x\cos x\,\mathrm{d}x$.

解 原式$=\int x\,\mathrm{d}\sin x$

$$=x\sin x-\int \sin x\,\mathrm{d}x$$

$$=x\sin x+\cos x+C$$

思考:如何求$\int x^2\sin x\,\mathrm{d}x$?

提示: 原式 $=-\int x^2\,\mathrm{d}\cos x$

$$=-x^2\cos x+2\int x\cos x\,\mathrm{d}x$$

$$=\cdots$$

例2 求 $\int \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x$.

解 原式 $= x\ln(1+x^2) - \int x d\ln(1+x^2)$

$$= x\ln(1+x^2) - \int \frac{2x^2}{1+x^2}dx$$

$$= x\ln(1+x^2) - 2\int \frac{1+x^2-1}{1+x^2}dx$$

$$= x\ln(1+x^2) - 2\int (1-\frac{1}{1+x^2})dx$$

$$= x\ln(1+x^2) - 2(x-\arctan x) + C$$

例3 求 $\int x\arctan x\,\mathrm{d}x$.

解 原式 $=\int \arctan x\,\mathrm{d}(\frac{1}{2}x^2)$

$$=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}\int(1-\frac{1}{1+x^2})\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}(x-\arctan x)+C$$

例4 求 $\int e^x \sin x \, \mathrm{d}x$.

解 原式 $= \int \sin x \, \mathrm{d}e^x = e^x \sin x - \int e^x \cos x \, \mathrm{d}x$

$$= e^x \sin x - \int \cos x \, \mathrm{d}e^x$$

$$= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \, \mathrm{d}x$$

故 原式 $= \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C$

说明: 也可设 $u = e^x, v'$ 为三角函数，但两次所设类型必须一致.

思考: 求 $\int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + C$

解题技巧　选取 u 及 v' 的一般方法:

把被积函数视为两个函数之积, 按 **"反对幂指三"** 或 "反对幂三指" 的顺序, 前者为 u 后者为 v'.

反:	反三角函数
对:	对数函数
幂:	幂函数
指:	指数函数
三:	三角函数

例5 求 $\int \arccos x\,\mathrm{d}x$.

解 原式 $= x\arccos x + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$

$$= x\arccos x - \tfrac{1}{2}\int (1-x^2)^{-1/2}\,\mathrm{d}(1-x^2)$$

$$= x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$$

思考 求 $\int \arcsin x\,\mathrm{d}x = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$

例7 求 $\int \frac{\ln\cos x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

解 原式 $= \int \ln\cos x \cdot \sec^2 x\,\mathrm{d}x = \int \ln\cos x\,\mathrm{d}\tan x$

$= \tan x \cdot \ln\cos x - \int \tan x\,\mathrm{d}\ln\cos x$

$= \tan x \cdot \ln\cos x - \int \tan x \frac{-\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x$

$= \tan x \cdot \ln\cos x + \int \tan^2 x\,\mathrm{d}x$

$= \tan x \cdot \ln\cos x + \int (\sec^2 x - 1)\,\mathrm{d}x$

$= \tan x \cdot \ln\cos x + \tan x - x + C$

例8 求积分 $\int \frac{x\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}dx.$

$$\left(\sqrt{1+x^2}\right)' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

解 $\int \frac{x\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}dx$

$$= \frac{1}{2}\int (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\arctan x d(x^2) = \int \arctan x d\sqrt{1+x^2}$$

$$= \sqrt{1+x^2}\arctan x - \int \sqrt{1+x^2}d(\arctan x)$$

$$= \sqrt{1+x^2}\arctan x - \int \sqrt{1+x^2}\cdot\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$= \sqrt{1+x^2}\arctan x - \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

$$\int \frac{x\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}dx = \sqrt{1+x^2}\arctan x - \boxed{\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx}$$

令 $x = \tan t$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 t}}\sec^2 t dt = \int \sec t dt$$

$$= \ln\left|\sec t + \tan t\right| + C = \ln(x+\sqrt{1+x^2}) + C$$

$$\therefore \quad \int \frac{x\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

$$= \sqrt{1+x^2}\arctan x - \ln(x+\sqrt{1+x^2}) + C.$$

例9 求 $\int \sec^3 x\,\mathrm{d}x$.

解 原式 $= \int \sec x \cdot \sec^2 x dx = \int \sec x d\tan x$

$$= \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x \,\mathrm{d}\, x$$

$$= \sec x \tan x - \int \sec^3 x dx + \int \sec x dx$$

$$= \sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x| - \int \sec^3 x dx$$

从而，原式 $= \dfrac{1}{2}(\sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|) + C$

同法可得：$\int \csc^3 x dx = \dfrac{1}{2}(-\csc x \cot x - \ln|\csc x + \cot x|) + C$

$$= \frac{1}{2}(-\csc x \cot x + \ln|\csc x - \cot x|) + C$$

例10 求 $\int\sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x\ (a>0).$

$$\boxed{令 x=a\tan t}$$

解 $\int\sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x=x\sqrt{x^2+a^2}-\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x$

$$=x\sqrt{x^2+a^2}-\int\frac{(x^2+a^2)-a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x$$

$$=x\sqrt{x^2+a^2}-\int\sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x+a^2\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$\therefore$ 原式 $=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$

$$\int\sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})+C$$

例11 求 $I_{n+1}=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{n+1}}\ (n\in N).$ 以退为进！

解
$$I_n=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}-\int x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{(x^2+a^2)^n}\right)$$

$$=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2n\int\frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2n\int\frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2nI_n-2na^2I_{n+1}$$

得递推公式 $I_{n+1}=\frac{1}{2na^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+\frac{2n-1}{2na^2}I_n$

$$I_n=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}$$

递推公式 $I_{n+1}=\dfrac{1}{2na^2}\dfrac{x}{(x^2+a^2)^n}+\dfrac{2n-1}{2na^2}I_n$

说明　已知 $I_1=\dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a}+C$ 利用递推公式可求得 I_n.

$$I_3=\frac{1}{4a^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^2}+\frac{3}{4a^2}I_2$$

$$=\frac{1}{4a^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^2}+\frac{3}{8a^4}\frac{x}{x^2+a^2}+\frac{3}{8a^5}\arctan\frac{x}{a}+C$$

也可令 $x=a\tan t$ 求

$$I_2=\frac{1}{2a^3}\arctan\frac{x}{a}+\frac{x}{2a^2(x^2+a^2)}+C$$

例12 证明递推公式

$$I_n=\int \tan^n x\,\mathrm{d}x=\frac{\tan^{n-1}x}{n-1}-I_{n-2}\quad (n\geq 2)$$

证 $$I_n=\int \tan^{n-2}x(\sec^2 x-1)\,\mathrm{d}x$$

$$=\int \tan^{n-2}x\,\mathrm{d}(\tan x)-I_{n-2}$$

$$=\frac{\tan^{n-1}x}{n-1}-I_{n-2}$$

注 $I_n\to\cdots\to I_0$ 或 I_1

$$I_0=x+C,\qquad I_1=-\ln|\cos x|+C$$

说明

分部积分题目的类型:

1) 直接分部化简积分;

2) 分部产生循环式, 由此解出积分式 ;

(注意: 两次分部选择的 u , v 函数类型不变, 解出积分后加 C)

3) 对含自然数 n 的积分, 通过分部积分建立递推公式.

例13 已知$f(x)$的一个原函数是$\dfrac{\cos x}{x}$, 求$\int x f'(x)\,\mathrm{d}x$.

解: 由题意知: $f(x)=\left(\dfrac{\cos x}{x}\right)'$, $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{\cos x}{x}+C$

$$\int x f'(x)\,\mathrm{d}x=\int x\,\mathrm{d}f(x)$$

$$=x f(x)-\int f(x)\,\mathrm{d}x=x\left(\frac{\cos x}{x}\right)'-\frac{\cos x}{x}+C$$

$$=-\sin x-2\frac{\cos x}{x}+C$$

若先求出 $f'(x)$ 再求积分, 此法复杂.

$$\int x f'(x)\,\mathrm{d}x=\int\left(-\cos x+\frac{2\sin x}{x}+\frac{2\cos x}{x^2}\right)\mathrm{d}x$$

例14. 求 $\int x^3(\ln x)^4\,\mathrm{d}x$.

解: 令 $u=\ln x$, 则 $x=e^u$, $\mathrm{d}x=e^u\,\mathrm{d}u$

原式 $=\int e^{3u}u^4\cdot e^u\,\mathrm{d}u=\int u^4e^{4u}\,\mathrm{d}u$

原式 $=\frac{1}{4}e^{4u}(u^4-u^3+\frac{3}{4}u^2-\frac{3}{8}u+\frac{3}{32})+C$

$=\frac{1}{4}x^4(\ln^4 x-\ln^3 x+\frac{3}{4}\ln^2 x-\frac{3}{8}\ln x+\frac{3}{32})+C$

例15. 求 $I=\int \frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x.$

解法1 用分部积分法

$$I=\int e^{\arctan x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\int e^{\arctan x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}(\arctan x)=\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}\,e^{\arctan x}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}e^{\arctan x}+\int\frac{x\,e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}e^{\arctan x}+\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}e^{\arctan x}$$

$$I=\int\frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}\,e^{\arctan x}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}e^{\arctan x}+\int\frac{x\,e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}e^{\arctan x}+\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}e^{\arctan x}$$

$$=\frac{e^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}e^{\arctan x}-\int e^{\arctan x}\mathrm{d}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}e^{\arctan x}(1+x)\quad-I$$

$$\therefore\quad I=\frac{1+x}{2\sqrt{1+x^2}}e^{\arctan x}+C$$

例15. 求$I=\int \frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x$.

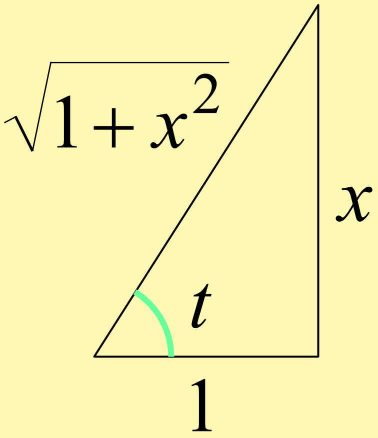
解法2　先换元后分部

令 $x=\tan t$,　即 $t=\arctan x$,　则

$$I=\int \frac{e^t}{\sec^3 t}\cdot \sec^2 t\,\mathrm{d}t=\int e^t\cos t\,\mathrm{d}t$$

$$=e^t\sin t-\int e^t \sin t\,\mathrm{d}t$$

$$=e^t\sin t+e^t\cos t-\int e^t\cos t\,\mathrm{d}t$$



故 $I=\frac{1}{2}(\sin t+\cos t)e^t+C$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right]e^{\arctan x}+C$$

内容小结

分部积分公式 $\int u v' \,\mathrm{d}x = u v - \int u' v \,\mathrm{d}x$

1. 使用原则： v 易求出, $\int u' v \,\mathrm{d}x$ 易积分

2. 使用经验：“反对幂指三”，前 u 后 v'

3. 题目类型：

分部化简； 循环解出； 递推公式